Demostraciones Matemáticas

Todo sobre lo que vamos a hablar en los próximos minutos es absolutamente cierto

Fuente de la imagen: https://www.pinterest.es/pin/521854675553887480/

- Todo lo que un profesor explica de matemáticas a sus alumnos es absolutamente cierto. Está bien que ellos lo sepan e interioricen el por qué y el poder que esto tiene.

- ¿Por qué es cierto?, porque en matemáticas no se da un paso sin demostrarlo.

- Una vez que se ha demostrado algo, esto es <u>cierto para siempre</u>.

Leonhard Euler

«Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebráico»

Fuente de la imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Euler#/media/File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png

Las matemáticas van cogidas de la mano de las demostraciones.

- Si no hay demostraciones, no hay matemáticas. Es lo que les da su principal característica: Rigor, robustez y confianza.

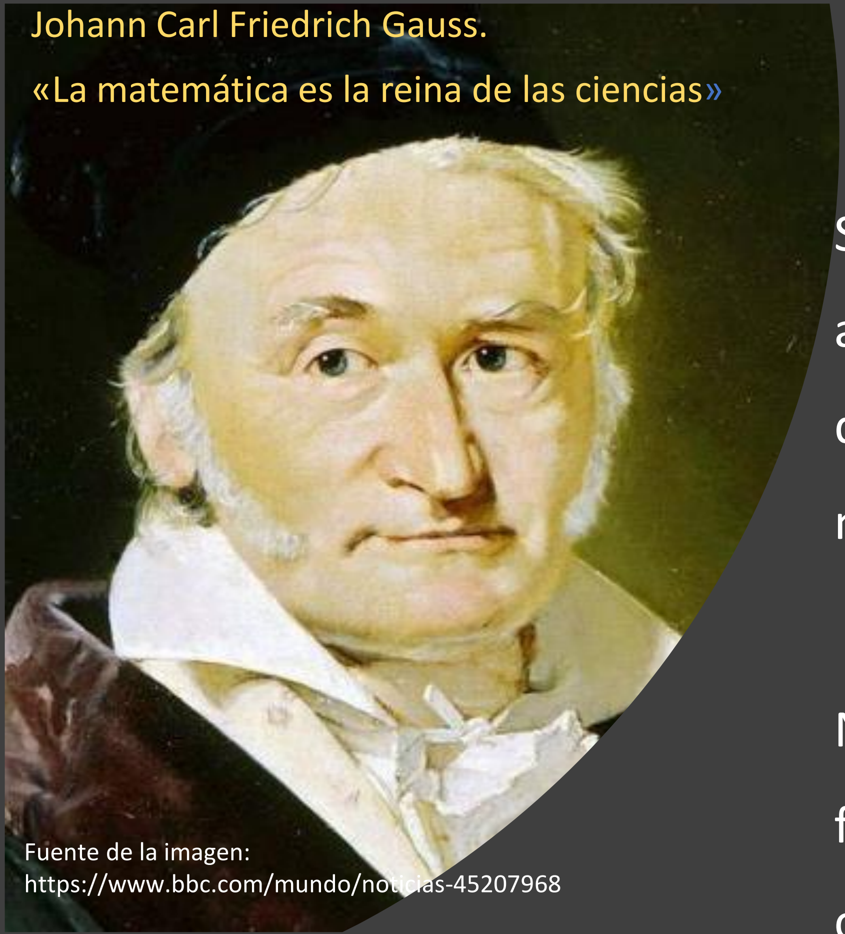
- Esto deberían conocerlo los alumnos.

Fuente de la imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/René_Descartes#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

René Descartes

«Para investigar la verdad, es preciso dudar en cuanto sea possible, de todas las cosas»

Las matemáticas convierten lo invisible en visible



Fuente de la imagen:
https://www.bbc.com/mundo/noticias-45207968

Sin matemáticas no hay forma de entender que es lo que mantiene un avión de Iberia en el aire. Se necesitan matemáticas para «ver» que es lo que le sostiene. Lo que nos permite ver lo invisible es la ecuación del matemático Daniel Bernoulli.

Nos creemos la ecuación y por tanto «vemos», porque detrás de toda formula matemática hay una demostración . Como las matemáticas están construidas teorema sobre teorema (verdades absolutas), aunque no lo sepamos ver (por ejemplo, algo en cuatro dimensiones no nos lo podemos imaginar), tenemos la certeza de que si ha sido demostrado en matemáticas, entonces es cierto y nos lo podemos creer sin atisbo de duda.

D. Bernoulli en 1738 publicó su obra «Hydrodynamica», en la que expone lo que más tarde sería conocido como el Principio de Bernoulli, que describe el comportamiento de un fluido al moverse a lo largo de un conducto cerrado.

Lo **BUENO** de las demostraciones:
Hay muchos tipos (herramientas)

Lo **MALO**: Encontrar una demostración a un teorema no es algo que pueda ser formalizado, siempre hay algo por detrás que corresponde a la intuición matemática.

A demostrar se aprende … demostrando

A base de ver y hacer demostraciones le vas cogiendo el «truquillo». Elevar ambos lados de una ecuación al cuadrado, multiplicar ambos lados por lo mismo, etc.

Fuente de la imagen: https://www.telesurtv.net/news/inventos-galileo-galilei-cambiaron-mundo-20180825-0011.html

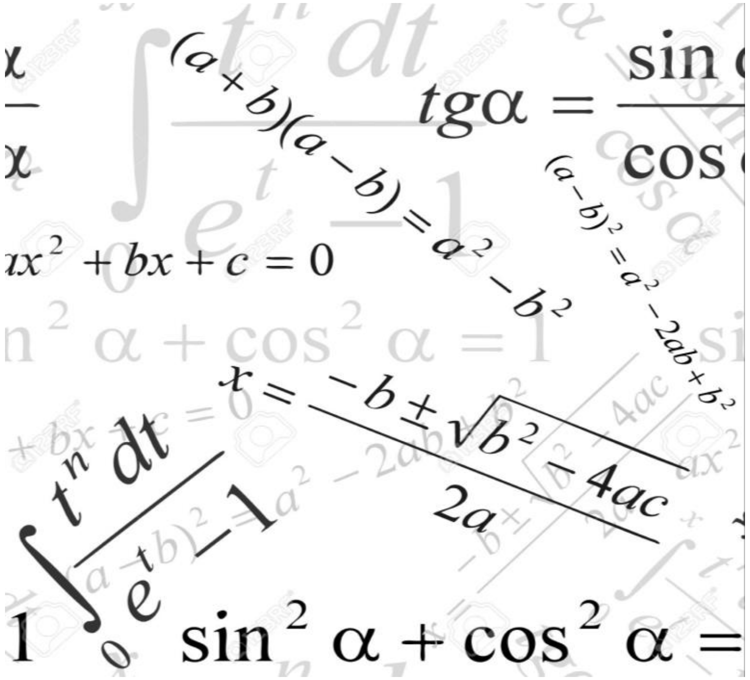
Galileo Galilei.

«Las Matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo»

Demostraciones matemáticas

Un teorema es una proposición matemática que puede ser demostrada que es verdad.

- Se asume que un teorema es una proposición matemática importante, de otra forma se llama simplemente proposición.
- Resultados intermedios se llaman lemas.
- Un corolario es un teorema que puede ser probado fácilmente de otro teorema probado anteriormente.
- Una conjetura es algo que se piensa que es verdadero, pero para lo cual no existe demostración.



Fuente de la imagen: https://es.123rf.com/photo_15069506_perfectamente-papel-pintado-con-f%C3%B3rmulas-matem%C3%A1ticas-en-blanco.html

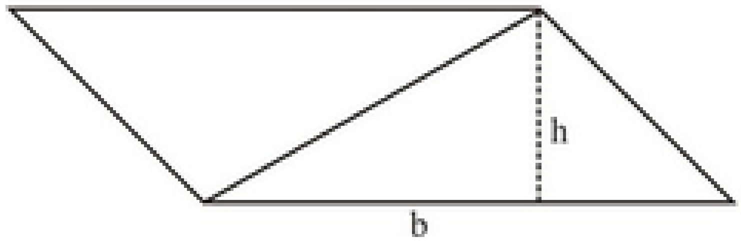
Tipos de Demostraciones

1. Demostraciones Geométricas

Nos hacen ver las cosas de una forma sencilla (creo que son las mejores para ESO)

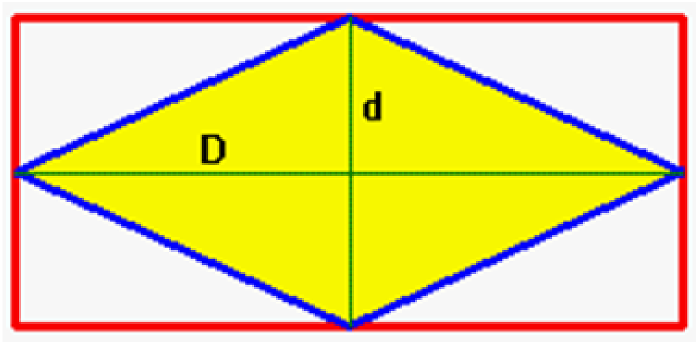
1.1. Demostración de que el área del triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$

El área de un paralelogramo es $b \cdot h$. El área de un triángulo es la mitad de la del paralelogramo.



Fuente de la imagen: https://www.ck12.org/book/CK-12-Geometr%C3%ADa-en-Espa%C3%B1ol/section/10.1/

1.2. Demostración que muestra de donde sale la fórmula del área de un rombo



Fuente de la imagen: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Los_cuadrilateros__fmi/cuadrilateros23a.htm

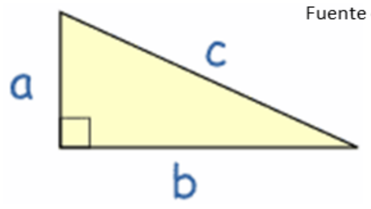
A=$\frac{D \cdot d}{2}$ (el área es la mitad que la del rectángulo que lo contiene)

1. Demostraciones Geométricas

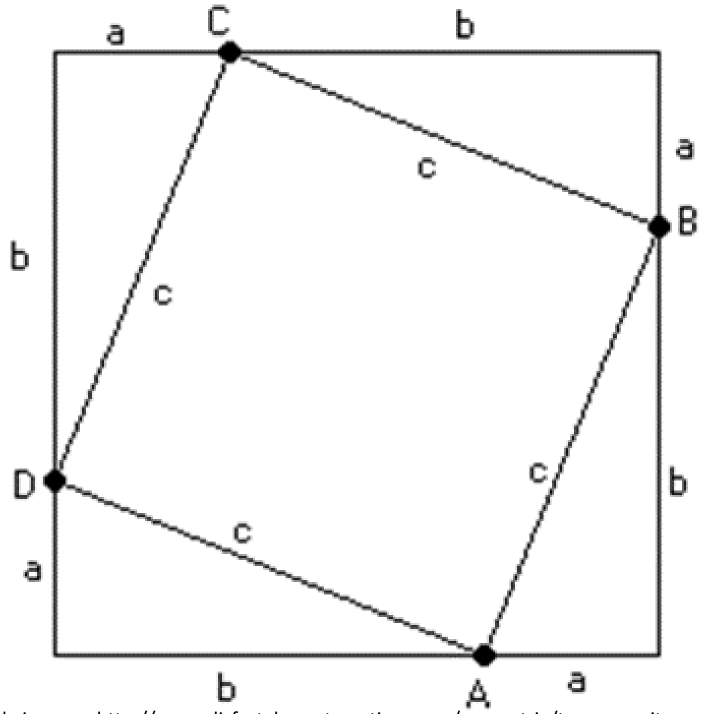
1.3. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo $a^2 + b^2 = c^2$

Vamos a demostrarlo utilizando una figura y álgebra



Fuente de la imagen: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras-demo.html



Fuente de la imagen: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras-demo.html

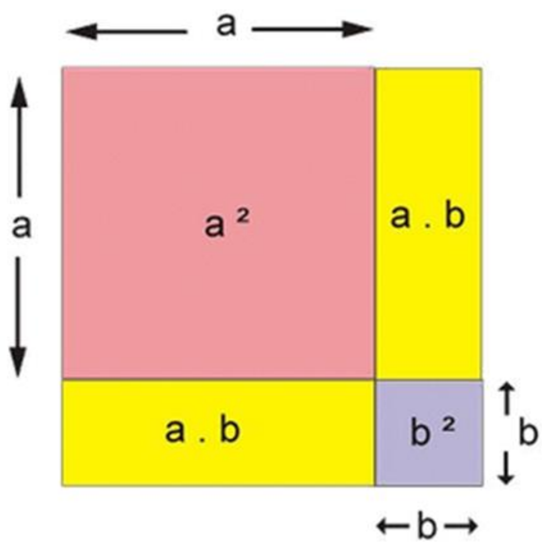
El área del cuadrado grande es *lado x lado*, i.e., $(a + b)(a + b)$
El área del cuadrado pequeño (interior) es c^2
Vamos a calcular ahora el área de los triángulos (ya demostramos en el punto 1.1. de este documento que era base por altura dividido entre dos)
Área de cada triángulo es: $\frac{b \cdot a}{2}$
El área del cuadrado grande = área del cuadrado pequeño + área de los cuatro triángulos

$$(a + b)(a + b) = c^2 + 4(\frac{b \cdot a}{2})$$
$$a^2 + b^2 + \cancel{2ab} = c^2 + \cancel{2ab}$$

1. Demostraciones Geométricas

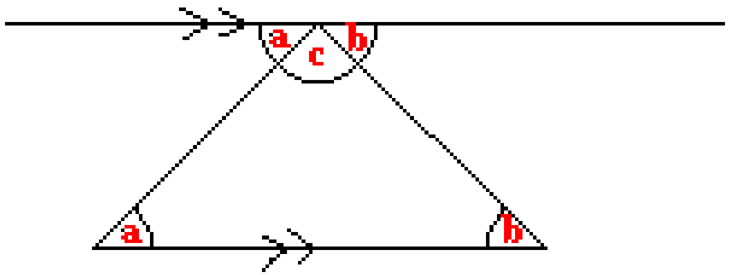
1.4. Demostración de la identidad notable del binomio al cuadrado

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Fuente de la imagen:
https://www.locoporlasmatematicasyque.blogsek.es/2014/02/04/investigacion-2o-eso-demostraciones-sin-palabras/

1.5. La suma de los ángulos de un triángulo suman 180º



Fuente de la imagen:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/triangulos-180.html

2. Demostraciones Directas

El camino por realizar consiste en, a partir de la hipótesis, encontrar una forma de llegar a la tesis utilizando las reglas que conocemos.

Ejemplo 1.

Si a,b $\in \mathbb{R}, \boldsymbol{a, b > 0}$ ***y*** $\boldsymbol{a \leq b}$***, probar que*** $\boldsymbol{\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}}$

Esto lo han visto en segundo cuando han visto fracciones

Vamos a demostrarlo:

Partimos de $a \leq b$, como a, b>0 podemos dividir sin miedo la inecuación entre el producto de ambos.

$$\frac{a}{ab} \leq \frac{b}{ab}$$

$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ que es la tesis que queríamos demostrar.

Ejemplo 2

Si *x* es un número entero impar, entonces $\boldsymbol{x^2}$ es impar.

Si x es impar, entonces es de la forma $x = 2k + 1$ para algún entero k

$$x^2 = (2k+1)^2$$

$$= (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Sea $p = 2k^2 + 2k$

$x^2 = 2p + 1$, i.e. impar.

2. Demostraciones Directas

La derivada del seno es el coseno

$$(\operatorname{sen} x)' = lim \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = lim \frac{\operatorname{sen}(x).\cos(h) + \cos(x).\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} =$$

$$= lim \frac{\operatorname{sen}(x).(\cos(h) - 1) + \cos(x).\operatorname{sen}(h)}{h} = \cos(x)$$

En general, las demostraciones de derivadas se suelen hacer utilizando la definición del límite.

¿Es 0,9999999999….= 1?

Podríamos pensar que no, que falta «un poquito» para ser iguales. Que nos lo digan las matemáticas.

$$x = 0{,}999999999\ldots$$
$$10x = 9{,}99999999\ldots$$

$$10x - x = 9{,}99999\ldots - 0{,}99999\ldots$$
$$9x = 9$$
$$x = 1$$

Otra forma más sencilla.

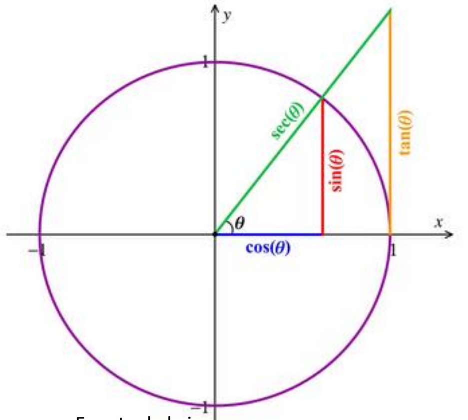
$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$$

Si multiplicamos por 3 ambos lados…ya lo tenemos.

1=0,9999…

2. Demostraciones Directas

Demostraciones trigonométricas



Fuente de la imagen: https://www.sacitametam.com/recursos/apuntes-de-trigonometria/

Identidad trigonométrica elemental

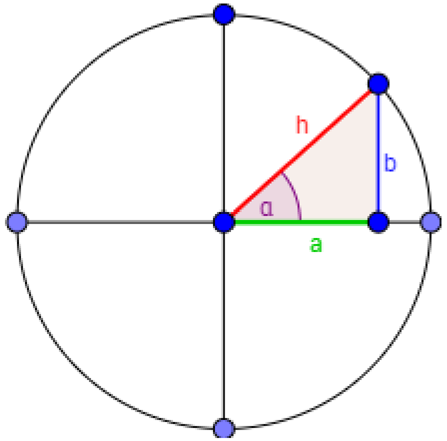
$$\boldsymbol{cos^2}(\alpha) + \boldsymbol{sin^2}(\alpha) = \mathbf{1}$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) =$$

$$= \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}(a^2 + b^2) \qquad = \frac{h^2}{h^2} = 1$$



Fuente de la imagen: https://www.matesfacil.com/ESO/trigonometria/identidades/identidades-trigonometricas-demostraciones-ejemplos.html

El triángulo de la circunferencia es rectángulo por lo que podemos aplicar Pitágoras

Secante al cuadrado

$$\boldsymbol{sec^2}(\alpha) = \mathbf{1} + \boldsymbol{tan^2}(\alpha)$$

Vamos a desarrollar el lado derecho de la ecuación, pero antes recordemos dos cosas:

$$\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} \text{ y } \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$1 + tan^2(\alpha) = 1 + \left(\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2 = \frac{cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}$$

$$\frac{1}{cos^2(\alpha)} =$$

$$sec^2(\alpha)$$

2. Demostraciones Directas

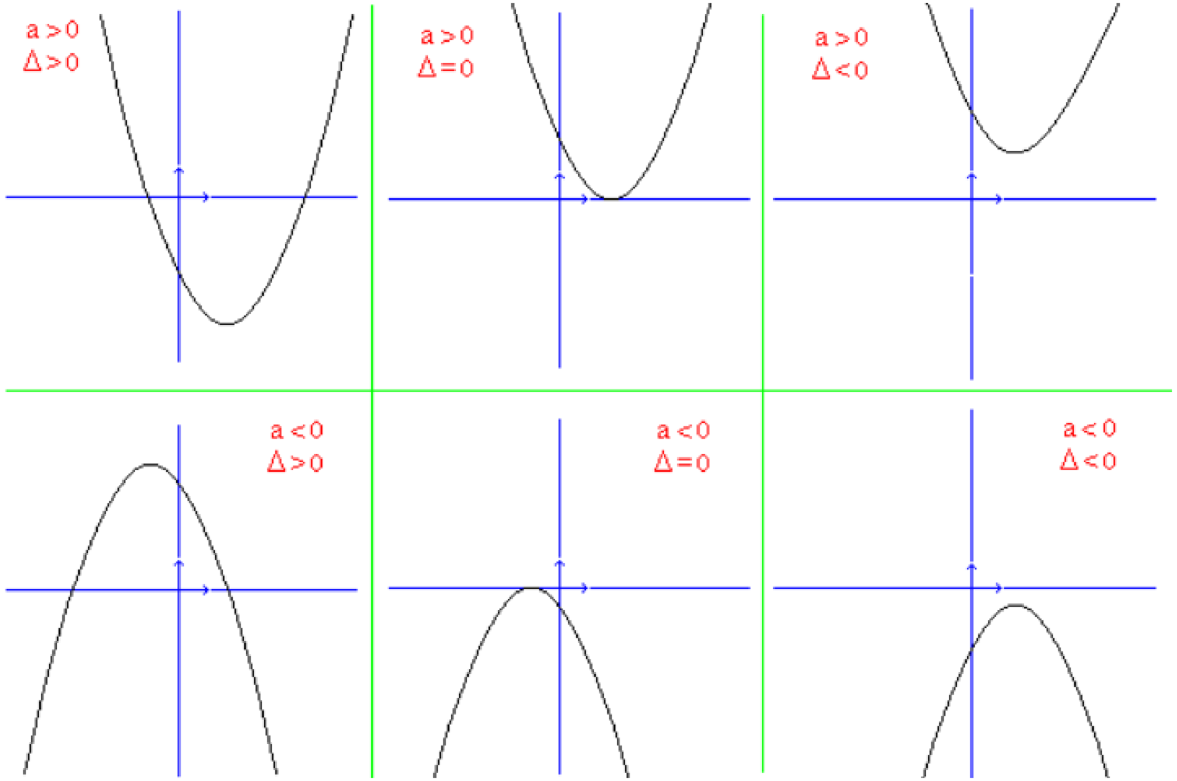
La solución a una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ siendo a, b y c números reales es $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Pongamos $ax^2 + bx = -c$ y multipliquemos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ Sumamos b^2 a ambos lados

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$
Agrupamos
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
despejando la x ya lo tenemos.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



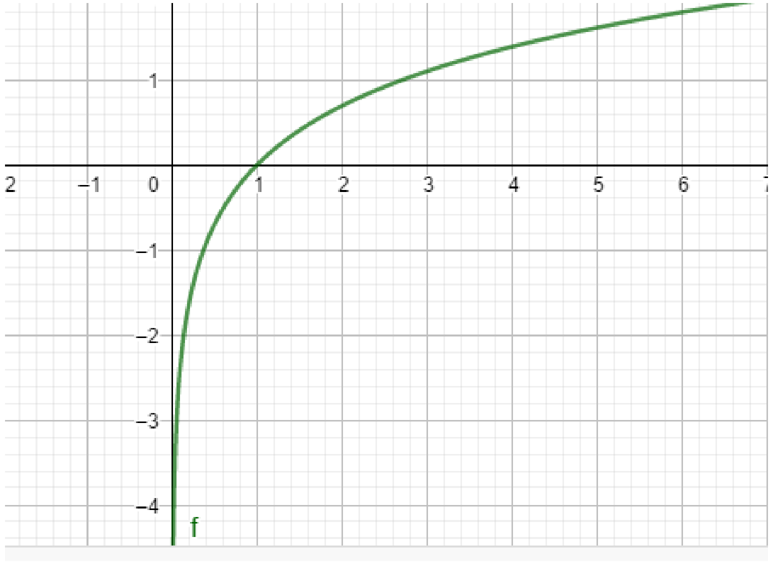
Fuente de la imagen:
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Segundo_grado_curvas.png

$\Delta = b^2 - 4ac$

2. Demostraciones Directas

Logaritmo del producto.

$$\log_b(P \cdot Q) = \log_b P + \log_b Q$$



Fuente: Propia utilizando GeoGebra

Sea $\log_b P = x \implies P = b^x$ y

$\log_b Q = y \implies Q = b^y$

Entonces

$$\log_b(P \cdot Q) = \log_b(b^x b^y) \implies \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b P + \log_b Q$$

3. Demostración por Inducción

- El método de la inducción es una de las armas más potentes que tienen las matemáticas:
- Nos permite concluir que una estructura o patrón es válido para la totalidad de los números naturales basándonos únicamente en dos muestras de evidencia. Se verifican dos resultados y se es capaz de obtener una conclusión para la infinidad de los números naturales.
- Se ha dado el caso de situaciones que utilizando un ordenador se han demostrado ciertas conjeturas para mil millones de casos y luego no han sido ciertas para todos los casos como se suponía.
- ¿Cómo podemos saber si una estructura se cumple para una infinidad de objetos?, veámoslo con un ejemplo.

Fuente de la imagen: https://www.anemat.com/guia/demostraciones/

3. Demostración por Inducción

Cuando se suman «n» números impares, podemos darnos cuenta de que al sumar los primeros n de ellos siempre da como resultado n^2

$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$\dots$$

Podemos pensar que $$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Para probar que una propiedad $P(n)\ se\ verifica\ \forall n \in \mathbb{N}$

Es suficiente probar solo dos hechos:

3. Demostración por Inducción

Es suficiente probar solo dos hechos:

1) Si $P(n)$ se cumple para $n = 1$, es decir $P(1)$ es verdadero
2) Si se supone $P(n)$ cierto para un número arbitrario n , entonces $P(n+1)$ también es cierto.

Si se pueden establecer ambos hechos, será posible concluir que $P(n)\ se\ verifica\ \forall n \in \mathbb{N}$

3. Demostración por Inducción

1) Para $n = 1$, $1 = 1^2$ lo cual es trivial.
2) Supongamos que ahora la identidad es cierta para un número n cualquiera.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

El siguiente número impar que sigue a $(2n - 1)$ es $(2n + 1)$, poniendo este número a ambos lados de la igualdad tenemos:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

Lo de la derecha es una identidad notable, así que

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ que es la propiedad $P(n + 1)$

Es decir, si se cumple la propiedad para un número n cualquiera entonces se cumple también para el siguiente.

Lo hemos demostrado por inducción matemática.

Existen infinidad de ecuaciones del tipo $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$, pero al haberlo demostrado, ya sabemos con absoluta certeza que esto va a ser cierto siempre.

4. Demostración por Reducción al Absurdo

Consiste en probar que si cierta afirmación es falsa, llegamos una contradicción lógica, por tanto esa afirmación es verdadera.

Fuente de la imagen: https://www.mibrujula.com/aveinte-pueblo-avila-limite-velocidad-cincuenta-kmh/

Ejemplo 1.

Si $\boldsymbol{n^2}$ *es impar entonces n es impar*

Supongamos que n^2 es impar, pero n es par

Supongamos que n^2 es impar, pero *n* es par. Es decir, existen dos números enteros «k» y «l» tal que

$$n^2 = 2k + 1 \quad y \quad n = 2l$$

Entonces, si $n = 2l \Longrightarrow \; n^2 = 4l^2$ por tanto

$$2k + 1 = 4l^2$$
$$1 = 4l^2 - 2k$$
$$1 = 2(2l^2 - k)$$

Y como si l y k son enteros, entonces $2l^2 - k$ también lo es (llamémosle «m»)

$$1 = 2m$$

Es decir, estamos diciendo que el 1 es par, eso es una contradicción.

4. Demostración por Reducción al Absurdo

Fuente de la imagen: https://www.pinterest.es/pin/535576580658592279/

Fuente de la imagen: https://es.memedroid.com/memes/tag/cocacola+vs+pepsi

Ejemplo 2.
Probemos que $\sqrt{2}$ es irracional

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces podemos ponerle como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ siendo a y b enteros distintos de cero sin factores comunes.

Entonces $\sqrt{2}b = a$. Elevando al cuadrado ambos lados $2b^2 = a^2$, esto quiere decir que *a* es par y por tanto lo podemos poner como $a = 2c$, siendo c también entero.

Sustituyendo en la ecuación original tenemos
$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$
$b^2 = 2c^2$
Entonces *b* tiene que ser par , b^2 se puede dividir por 2, entonces *b* es par.

Hemos llegado a que tanto *a* como *b* son pares, entonces comparten un factor común que es 2, esto contradice lo que hemos asumido de que no tenían factores comunes, así que $\sqrt{2}$ es irracional

Muchas gracias por su atención

«El principio es la mitad de todo» (Pitágoras)

Fuente de la imagen: https://steemit.com/blog/@team-leibniz/learning-should-be-uncomfortable-lessons-learned-from-the-story-of-the-crab-bucket-steem-and-my-life-as-a-math-teacher